

6174 の不思議

西山豊

数字の 6174 はちょっとした面白い数である。数学が苦手な人でも、数学が嫌いな人でも、数学に対するイメージが変わるかもしれない。そのためには 4 桁の数の引き算が必要であるが、これは小学校の義務教育で学んでいるはずだから、ほぼ全員がこの話に参加できることになる。

4 桁の数字をひとつ決める。ただし、4 桁とも同じ数字、たとえば 1111 とか 2222 は除外する。説明のために、今年の 2011 年から 4 桁の数字を 2011 としよう。さてこの数字を構成する 4 桁をバラバラにして、大きい順に並べると 2110 になる。同様にして小さい順に並べると 0112 になる。0 も数とみなしてこのように表示することにする。そこで、大きい順に並べてできた数 2110 から小さい順に並べてできた数 0112 を引く。

$$2110-0112=1998$$

このような操作を発見者、D.R.カプレカー (1905-1986) の名前をとってカプレカー操作という。引き算によってできた新しい数 1998 に対しても、同じような操作、大きい順に並べかえた数から小さい順に並べかえた数を引くことを繰り返す。

$$9981-1899=8082$$

$$8820-0288=8532$$

$$8532-2358=6174$$

$$7641-1467=6174$$

するとどうだろう。4 回目の引き算で 6174 に到達するとともに、5 回目以降の引き算では、何回繰り返しても 6174 になる。面白いことは、すべての 4 桁の数はカプレカー操作で 6174 に到達

することである。読者は、他の数で試してみることに。6174 に到達する回数は最大 7 回であることがわかっている。だから、少々計算間違いをしても 6174 に到達するのだ。4 桁の引き算に自信がない読者は電卓を使おう。

なぜこのような不思議な現象が起こるのであるだろうか？ 証明方法のひとつとして、4 桁の数を 30 個の数に絞り込み、その 30 個の系統図を図示すると 6174 に到達しているとするものがあるが、なぜという問いには明快に答えていない。

4 桁以外の数はどうなるのだろうか？ と興味をわくことだろう。3 桁の数は 495 に到達することがわかっている。2 桁の数は到達する数がなく、つぎのループに入って循環する。

$$9 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45$$

5 桁の数は、3 つのループのどれかに入る。

4 桁の 6174 や 3 桁の 495 のように、同じ数字で循環する数は、6 桁の場合は 549945 と 631764、8 桁の場合は 63317664 と 97508421 があるが、すべての 6 桁の数、すべての 8 桁の数が、それらに到達するわけでもない。

すべての 4 桁の数が 6174 に到達する背景には何か数学の定理が潜んでいるのではと期待したいところだが、これは単なる偶然とも言われている。詳しくは「6174 の不思議」『理系への数学』2006 年 1 月号 (『数学を楽しむ』に所収) を参照のこと。この記事はケンブリッジのオンラインマガジン PLUS 第 38 号に英訳されて世界中の人に親しまれている。Mysterious Number 6174,

<http://plus.maths.org/content/os/issue38/features/nishiyama/index>

この記事を読んだイタリアの読者は、洒落たコメントを寄せてくれた。「すべての道はローマに通ず、すべての数は 6174 に通ず。」

(にしやまゆたか／大阪経済大学)